数理解析研究所講究録
300巻 1977年 36-39

Schmidの指標の関係式について

広大理　堀田良之

Gを連結半単純Lie群で，コンパクトなカルタン部分群 T をもつものとし，更に，ある複素半単純群 $G(\mathbb{C})$ の部分群になっているものとする。$G(\mathbb{C})$ のボレル部分群 B を $T = B \cap G$ となるように固定する。Ψ を B が定める (G, T) に関する正のルート系；即ち

$$\mathrm{Lie}\, B = (\mathrm{Lie}\, T) \otimes \mathbb{C} + \sum_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

（$\mathfrak{g}^{\alpha}$ はルート α の固有空間）

とする。 $\Psi = \Psi_k \cup \Psi_n$ ； $\Psi_k = \{$コンパクトルート$\}$ $\Psi_n = \{$非コンパクトルート$\}$ とおく。Tのユニタリ指標 λ は自然に B の複素指標に拡張されるので，λ はコンパクト複素多様体 $X = G(\mathbb{C})/B$ 上の line bundle $\mathcal{L}_\lambda$ を与える。一方 X の G-orbit 分解の中で，

$$D = G.B \simeq G/T \subset G(\mathbb{C})/B$$

は開集合。 W. Schmid の一連の仕事より次の事柄はわかっている:

1) $\langle \lambda, \alpha \rangle$ 十分大 ($\alpha \in \Psi_k$) なら層係数コホモロジーに関して

$$H^i(D, \mathcal{L}_\lambda|D) = 0 \quad i \neq s = |\Psi_k|.$$

2) G-加群 $H^s(D, \mathcal{L}_\lambda|D)$ は Blattner 型の K-type をもつ。

3) $\langle \lambda - \rho, \alpha \rangle > 0$ ($\alpha \in \Psi$) なら L^2 コホモロジー

$$H^s_{(2)}(D, \mathcal{L}_\lambda|D) \left(\hookrightarrow H^s(D, \mathcal{L}_\lambda|D) \right)$$

は discrete series $\omega(\lambda-\rho)$ を与える(ρ は Ψ の和の半分)。

さて問題とするのは, Schmid が Blattner 予想を証明するにあたり用いた(必ずしもユニタリとは限らぬ virtual な)指標の間の関係式

$$\Theta(\Psi, \lambda) + \Theta(s_\alpha \Psi, \lambda) = \Theta_{\Psi, \alpha, \lambda}$$

(Inv. Math., 1975) をこの図式の中で解けないかということである。

$\alpha \in \Phi_n$ を単純ルート，w_α を対応する reflection，c_α を所謂 Cayley 変換：

$$c_\alpha = \mathrm{Ad}\, e^{\frac{\pi}{4}(Y_{-\alpha} - Y_\alpha)}$$

（$Y_{\pm\alpha}$ は適当なルート基底）

とする．$X = G(\mathbb{C})/B$ の3つの G-orbits

$$D = G.B$$
$$\partial_\alpha = G.c_\alpha B$$
$$D_\alpha = G.w_\alpha B$$

を考える．D，D_α は X の中で開，∂_α は実余次元が1の実部分多様体で，D，D_α の境界にはいる．

<u>期待</u>：

I) ∂_α は適当な部分複素構造をもつゆえ，それに関してコホモロジー群

$$H^*_?(\partial_\alpha, \mathcal{L}_\lambda|\partial_\alpha)$$

を定義し，制限写像

$$\begin{matrix} H^*(D, \mathcal{L}_\lambda|D) \longrightarrow \\ H^*(D_\alpha, \mathcal{L}_\lambda|D_\alpha) \longrightarrow \end{matrix} H^*_?(\partial_\alpha, \mathcal{L}_\lambda|\partial_\alpha)$$

が得られるようにせよ。左側は dense な部分空間からでもよい。

II) I) の下で, $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$ ($\alpha \in \Phi_k$) ならば

$$H^s(D, \mathcal{L}_\lambda|D) \oplus H^s(D_\alpha, \mathcal{L}_\lambda|D_\alpha) \simeq H^s(D \cup D_\alpha, \mathcal{L}_\lambda|D \cup D_\alpha)$$

$$\xrightarrow{\text{rest}} H^s_?(\partial_\alpha, \mathcal{L}_\lambda|\partial_\alpha)$$

は"本質的"に同型（例えば K-finite vectors の空間に対して）。

これらは, $G = SL(2, \mathbb{R})$ のとき当り前になる.